


Mapas de Progreso del Aprendizaje

Sector Matemática
Mapa de Progreso de
Números y Operaciones

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Mapas de Progreso del Aprendizaje

Sector Matemática
Mapa de Progreso de
Números y Operaciones

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Mapas de Progreso del Aprendizaje
Números y Operaciones
Material elaborado por la Unidad de Currículum, UCE,
ISBN: 978-956-292-144-2
Registro de Propiedad Intelectual Nº 161126
Ministerio de Educación.

Se agradece a los profesores y profesoras de los siguientes establecimientos
que colaboraron en el proceso de recolección de trabajos de alumnos y alumnas:
Alianza Francesa - Vitacura
Colegio Alonso de Ercilla - Melipilla
Colegio Carlos Oviedo Cavada - Maipú
Colegio Notre Dame - Providencia
Colegio Saint George - Vitacura
Colegio San Adrián - Quilicura
Colegio San Sebastián de Melipilla - Melipilla
Colegio Santo Cura de Ars - San Miguel
Colegio Víctor Domingo Silva - La Reina
Confederación Suiza - Santiago
Escuela Antártica Chilena - Vitacura
Escuela Cardenal Raúl Silva Henríquez - Puente Alto
Escuela Irene Frei de Cid - Santiago
Escuela República de Ecuador - Viña del Mar
Escuela San Joaquín - Renca
Escuela Victoria Prieto - Santiago
Instituto Nacional - Santiago
Liceo Christie Mc Auliffe - La Cisterna
Liceo Darío Salas - Santiago
Liceo Domingo Espiñeira Riesco - Ancud - Chiloé
Liceo Santa María de Santiago - Santiago

Diseño y diagramación: Designio
Imprenta: Valente
Marzo de 2009

Mapas de Progreso del Aprendizaje

El documento que se presenta a continuación es parte del conjunto de Mapas de Progreso del Aprendizaje, que describen la secuencia típica en que este se desarrolla, en determinadas áreas o dominios que se consideran fundamentales en la formación de cada estudiante, en los distintos sectores curriculares. Esta descripción está hecha de un modo conciso y sencillo para que todos puedan compartir esta visión sobre cómo progresa el aprendizaje a través de los 12 años de escolaridad. **Se busca aclarar a los profesores y profesoras, a los alumnos y alumnas y a las familias, qué significa mejorar en un determinado dominio del aprendizaje**.

Los Mapas complementan los actuales instrumentos curriculares (Marco Curricular de OF/CMO y Programas de Estudio) y en ningún caso los sustituyen. Establecen una relación entre currículum y evaluación, orientando lo que es importante evaluar y entregando criterios comunes para observar y describir cualitativamente el aprendizaje logrado. No constituyen un nuevo currículum, ya que no promueven otros aprendizajes; por el contrario, pretenden profundizar la implementación del currículum, promoviendo la observación de las competencias clave que se deben desarrollar.

Los Mapas describen el aprendizaje en 7 niveles, desde 1° Básico a 4° Medio, con la excepción de Inglés, que tiene menos niveles por comenzar su enseñanza en 5° Básico.

Cada nivel está asociado a lo que se espera que los estudiantes hayan logrado al término de determinados años escolares. Por ejemplo, el nivel 1 corresponde al logro que se espera para la mayoría de los niños y niñas al término de 2° Básico; el nivel 2 corresponde al término de 4° Básico y así sucesivamente cada dos años. El último nivel (7), describe el aprendizaje de un alumno o alumna que al egresar es "sobresaliente", es decir, va más allá de la expectativa que se espera para la mayoría que es el nivel 6. No obstante lo anterior, la realidad muestra que en un curso coexisten estudiantes con distintos niveles. Por esto, lo que se busca es ayudar a determinar dónde se encuentran en su aprendizaje y hacia dónde deben avanzar, y así orientar las acciones pedagógicas de mejoramiento.

Matemática

El currículum de Matemática tiene como propósito que los alumnos y alumnas adquieran los conocimientos básicos de la disciplina, desarrollando el pensamiento lógico, la capacidad de deducción, la precisión, las capacidades para formular y resolver problemas y las habilidades necesarias para modelar situaciones o fenómenos. En este contexto, la matemática se vincula directamente con la necesidad de responder y resolver variados desafíos provenientes tanto del ámbito del quehacer humano como de la matemática misma; es por este motivo que se considera su construcción y desarrollo ligada a la historia y la cultura humana. Su aprendizaje enriquece la comprensión de la realidad, facilita la selección de estrategias para resolver problemas y contribuye al desarrollo de un pensamiento propio y autónomo. El modelamiento matemático de la realidad, mediante el uso apropiado de conceptos, relaciones entre ellos y procedimientos matemáticos, ayuda al estudiante a comprender situaciones y fenómenos, y le permite formular explicaciones y hacer predicciones de ellos, aumentando su capacidad para intervenir en esa realidad.

Mapa de Progreso de Números y Operaciones

Los aprendizajes de Matemática se han organizado en cuatro Mapas de Progreso:

- **Números y Operaciones,** describe el desarrollo del concepto de cantidad y de número y la competencia en el uso de técnicas mentales y escritas para calcular y resolver problemas que involucran distintos tipos de números.
- **Álgebra,** describe el progreso de la capacidad para utilizar símbolos en la representación de generalidades y el modelamiento de situaciones y fenómenos así como también el desarrollo de la argumentación matemática.
- **Geometría,** describe el progreso de habilidades relacionadas con la comprensión de formas, la posición y transformaciones, así como también las relacionadas con medición, estimación y comparación de magnitudes.
- **Datos y Azar,** describe el progreso de las habilidades para organizar y representar información disponible, para describir y analizar situaciones y hacer interpretaciones de sucesos en los que interviene el azar y la incertidumbre.

El **Razonamiento Matemático** constituye una dimensión que es abordada transversalmente en estos cuatro Mapas de Progreso.

Los aprendizajes descritos en el Mapa **Números y Operaciones** progresan considerando tres dimensiones que se desarrollan de manera interrelacionada:

a. **Comprensión y uso de los números.** Se refiere a la comprensión del significado de los números, la forma de expresarlos y los contextos numéricos a los que pertenecen, así como las aplicaciones y los problemas que los originaron y/o permiten resolver.
b. **Comprensión y uso de las operaciones.** Se refiere a la comprensión del significado de las operaciones, los contextos numéricos en los que se realizan, las relaciones entre ellas, así como sus propiedades y usos para obtener nueva información a partir de la información dada.
c. **Razonamiento Matemático.** Involucra habilidades relacionadas con la selección, aplicación y evaluación de estrategias para la resolución de problemas; la argumentación y la comunicación de estrategias y resultados.

Elementos claves del Mapa de Progreso de Números y Operaciones

Un supuesto importante que orienta este Mapa se refiere a la íntima relación entre los números, las operaciones que permiten realizar y los problemas que resuelven; y cómo las operaciones generan preguntas y problemas que motivan nuevas definiciones de números y extensiones de los ámbitos numéricos. El progreso del concepto de número está dado, primero, por la extensión de los números naturales en relación con los requerimientos del proceso del conteo; luego, la operación de sustracción muestra la necesidad de los números negativos, motivando la noción de número entero; la división entre números enteros motiva la aparición de los racionales y, la operación extracción de raíz, muestra la necesidad de utilizar nuevos números, dando inicio al estudio de los irracionales y, posteriormente, de los números imaginarios en el caso de las raíces de números negativos.

Las operaciones se consideran en este eje, principalmente, desde el punto de vista de su comprensión, su uso adecuado y cómo a través de ellas los alumnos y alumnas muestran dominio de los números. Operaciones también incluye la habilidad para estimar y calcular mentalmente.

Finalmente, el Razonamiento Matemático, en este Mapa, se refiere a la resolución de problemas con números y sobre números. La resolución de problemas implica la capacidad de una persona para reunir, organizar, combinar y utilizar en forma apropiada, conocimientos matemáticos que permiten responder a situaciones o problemas parcial o completamente nuevos; o bien, a la capacidad para responder a un problema conocido de una forma nueva, original o parcialmente diferente a las respuestas dadas con anterioridad. En este sentido, resolución de problemas se opone a comportamiento rutinario o repetitivo.

La resolución de problemas también incluye el uso de los números para hacer e investigar conjeturas sobre ellos. Esto involucrará el uso de un rango creciente de estrategias para resolver problemas y argumentaciones crecientemente más abstractas y de naturaleza cada vez más sofisticada.

Esta capacidad requiere el desarrollo de habilidades tales como: la identificación de la incógnita o de las variables cuyos valores permitirían resolver el problema; la búsqueda y construcción de caminos de solución; el análisis de los datos y de las soluciones; la anticipación y estimación de el o los resultados posibles; el análisis de la pertinencia de esos resultados; la sistematización del ensayo y error, así como la aplicación y ajuste de modelos.

En las páginas siguientes se encuentra el Mapa de Progreso de Número y Operaciones. Comienza con una presentación sintética de todos los niveles. Luego se muestra en detalle cada nivel, partiendo por su descripción, algunos ejemplos de desempeño que ilustran cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje, y uno o dos ejemplos de trabajo realizados por alumnos y alumnas de diversos establecimientos, con los comentarios que justifican por qué se juzga que el trabajo del estudiante se encuentra “en” el nivel. En un anexo se incluye la versión completa de las tareas a partir de las cuales se recolectaron los trabajos de los estudiantes.

En la mayor parte de los casos estas tareas fueron diseñadas para ser desarrolladas por los alumnos y alumnas en el aula, durante una hora de clases, y considerando que pudieran ser reproducidas en un documento impreso. Varias tareas demandaron que los alumnos y alumnas desarrollaran diversos pasos, de ellos se ha incorporado en el documento aquel que ilustra un desempeño más expresivo del nivel.

Mapa de Progreso de Números y Operaciones

Nivel 7 Sobresaliente	Comprende los diferentes conjuntos numéricos, las relaciones entre ellos y los problemas que les dieron origen[3]. Comprende que en cada conjunto numérico se puede operar sobre la base de reglas o propiedades que pueden ser usadas para justificar o demostrar relaciones. Muestra autonomía y flexibilidad para resolver un amplio repertorio de problemas, tanto rutinarios como no rutinarios, utilizando diversas estrategias y para formular conjeturas acerca de objetos matemáticos. Utiliza lenguaje matemático para presentar argumentos en la demostración de situaciones matemáticas.
Nivel 6	Reconoce a los números complejos como una extensión del campo numérico y los utiliza para resolver problemas que no admiten solución en los números reales. Usa las cuatro operaciones con números complejos. Resuelve problemas utilizando un amplio repertorio de estrategias, combinando o modificando estrategias ya utilizadas, formula conjeturas que suponen generalizaciones o predicciones y argumenta la validez de los procedimientos o conjeturas.
Nivel 5	Reconoce a los números racionales como un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no admiten solución en los enteros, a los irracionales como un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no admiten solución en los racionales, y a los reales como la unión entre racionales e irracionales. Interpreta potencias de base racional y exponente racional, raíces enésimas y logaritmos, establece relaciones entre ellos y los utiliza para resolver diversos problemas. Realiza operatoria con números reales, calcula potencias, raíces y logaritmos y los aplica en diversos contextos. Resuelve problemas utilizando estrategias que implican descomponer un problema o situaciones propuestas en partes o sub-problemas. Argumenta sus estrategias o procedimientos y utiliza ejemplos y contraejemplos para verificar la validez o falsedad de conjeturas.
Nivel 4	Reconoce a los números enteros como un conjunto numérico en donde se pueden resolver problemas que no admiten solución en los números naturales, reconoce sus propiedades y los utiliza para ordenar, comparar y cuantificar magnitudes. Establece proporciones y las usa para resolver diversas situaciones de variación proporcional. Comprende y realiza las cuatro operaciones con números enteros. Utiliza raíces cuadradas de números enteros positivos y potencias de base fraccionaria positiva, decimal positivo o entero y exponente natural en la solución de diversos desafíos. Resuelve problemas y formula conjeturas en diversos contextos en los que se deben establecer relaciones entre conceptos. Justifica la estrategia utilizada, las conjeturas formuladas y los resultados obtenidos, utilizando conceptos, procedimientos y relaciones matemáticas.
Nivel 3	Reconoce que los números naturales se pueden expresar como producto de factores. Comprende el significado de potencias de base y exponente natural, y las aplica en situaciones diversas. Utiliza números decimales positivos y fracciones positivas para ordenar, comparar, estimar, medir y calcular. Comprende el significado de porcentaje y establece equivalencias entre estos y fracciones o números decimales, para calcular porcentajes. Comprende y realiza las cuatro operaciones con números positivos escritos tanto en forma decimal como fracción y en forma mental y escrita. Resuelve problemas y formula conjeturas en diversos contextos, que requieren reorganizar la información disponible. Argumenta sobre la validez de un procedimiento, estrategia o conjetura planteada.
Nivel 2	Utiliza los números naturales hasta 1.000.000 para contar, ordenar, comparar, estimar y calcular. Comprende que las fracciones simples[1] y los números decimales permiten cuantificar las partes de un objeto, una colección de objetos o una unidad de medida. Realiza comparaciones entre números decimales o entre fracciones y establece equivalencias entre ambas notaciones[2]. Multiplica y divide (por un solo dígito) con números naturales, comprendiendo el significado de estas operaciones y la relación entre ellas y con la adición y sustracción. Realiza estimaciones y cálculos mentales de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones exactas que requieren de estrategias simples. Resuelve problemas en contextos familiares en que los datos no están necesariamente explícitos o requieren seleccionar información del enunciado. Justifica la estrategia utilizada, explicando su razonamiento. Formula conjeturas y las verifica a través de ejemplos.
Nivel 1	Utiliza los números naturales hasta 1.000 para contar, ordenar, comparar, estimar y calcular cantidades de objetos y magnitudes. Comprende que la posición del número, en los números naturales, determina su valor. Realiza adiciones y sustracciones comprendiendo el significado de estas operaciones y la relación entre ellas, y las utiliza para establecer relaciones de orden. Reconoce que los números naturales se pueden expresar como adiciones o sustracciones de dos números naturales, en particular descomposición en centenas, decenas y unidades. Realiza cálculos mentales de adiciones y sustracciones que requieren de estrategias simples con números menores que 100. Resuelve problemas en contextos familiares, en que los datos están explícitos. Describe la estrategia utilizada y comunica sus resultados en relación con el contexto del problema.

1 Fracciones simples: ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{100}$).

2 Para las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{100}$.

3 Los enteros motivados por la sustracción, los racionales por los cuocientes imposibles entre enteros, los irracionales como consecuencia de la raíz cuadrada y los imaginarios como consecuencia de las raíces de orden par de números negativos.

Nivel 1

Utiliza los números naturales hasta 1.000 para contar, ordenar, comparar, estimar y calcular cantidades de objetos y magnitudes. Comprende que la posición del número, en los números naturales, determina su valor. Realiza adiciones y sustracciones comprendiendo el significado de estas operaciones y la relación entre ellas, y las utiliza para establecer relaciones de orden. Reconoce que los números naturales se pueden expresar como adiciones o sustracciones de dos números naturales, en particular descomposición en centenas, decenas y unidades. Realiza cálculos mentales de adiciones y sustracciones que requieren de estrategias simples con números menores que 100. Resuelve problemas en contextos familiares, en que los datos están explícitos. Describe la estrategia utilizada y comunica sus resultados en relación con el contexto del problema.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- Compara números de dos y tres cifras. Por ejemplo: la longitud de ríos chilenos para saber cuál es más largo; el precio de dos o más productos para saber cuál es el más conveniente.
- Estima cantidades a partir de un conjunto de objetos. Por ejemplo: cantidad de porotos o piedras en una caja cuando se sabe la cantidad total que ésta es capaz de contener.
- Cuenta objetos utilizando estrategias de agrupaciones. Por ejemplo: cuenta bolitas o fichas de 5 en 5 o de 10 en 10, etc.
- Calcula mentalmente el resultado de problemas que involucran adición o sustracción de números pequeños. Por ejemplo: calcula la cantidad de alumnos en una biblioteca si hay nueve estudiantes y llegan ocho estudiantes más, completando la decena ($9 + 8 = 9 + 1 + 7 = 10 + 7 = 17$).
- Resuelve adiciones y sustracciones, utilizando composición y descomposición aditiva.
- Responde preguntas relacionadas con los números y las operaciones. Por ejemplo: responde a la pregunta: ¿qué sucede cuando cambias la posición de los dígitos en el número 79?

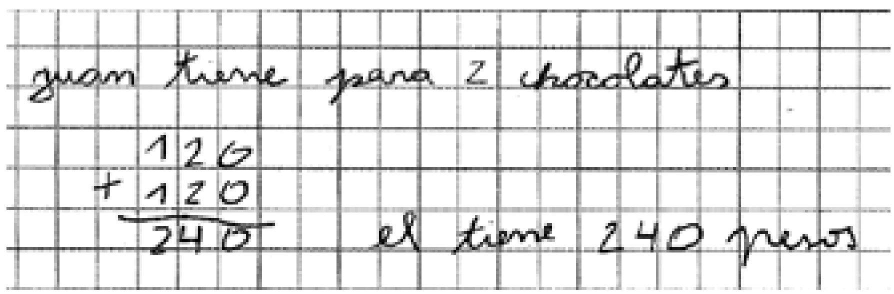
Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

- **La tarea:**

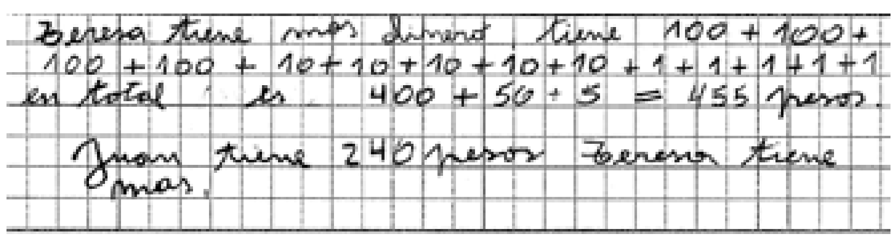
A los alumnos y alumnas se les presentó una situación en la que dos hermanos querían comprar chocolates que costaban 120 pesos cada uno. Se señaló para cuántos chocolates le alcanzaba a Juan y se entregó la cantidad de monedas que tenía Teresa a través de una ilustración. Se les pidió a los estudiantes determinar la cantidad de dinero que tenía cada niño y quién de ellos tenía más dinero para la compra de chocolates.

• Ejemplo de trabajo en el nivel »

a. Si Juan tiene dinero para comprar dos chocolates, entonces ¿cuánto dinero tiene Juan? Muestra tu desarrollo.



b. De los dos hermanos, ¿quién tendría más dinero? Muestra tu desarrollo.



Comentarios:

a. Realiza la adición necesaria para responder cuánto dinero tiene Juan.

b. Compone aditivamente para determinar el monto de dinero que tiene Teresa. Compara ambos resultados obtenidos y señala cuál de los dos niños tiene más dinero.

Nivel 2	Utiliza los números naturales hasta 1.000.000 para contar, ordenar, comparar, estimar y calcular. Comprende que las fracciones simples[4] y los números decimales permiten cuantificar las partes de un objeto, una colección de objetos o una unidad de medida. Realiza comparaciones entre números decimales o entre fracciones y establece equivalencias entre ambas notaciones[5]. Multiplica y divide (por un solo dígito) con números naturales, comprendiendo el significado de estas operaciones y la relación entre ellas y con la adición y sustracción. Realiza estimaciones y cálculos mentales de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones exactas que requieren de estrategias simples. Resuelve problemas en contextos familiares en que los datos no están necesariamente explícitos o requieren seleccionar información del enunciado. Justifica la estrategia utilizada, explicando su razonamiento. Formula conjeturas y las verifica a través de ejemplos.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- Compara números naturales hasta el millón en contextos de la vida cotidiana. Por ejemplo: la distancia entre su localidad y dos o más ciudades; el número de personas que asisten a dos partidos de fútbol diferentes.
- Estima el resultado de una multiplicación, a partir del redondeo de los términos involucrados. Por ejemplo: aproxima el resultado del producto de $13 \cdot 29$, redondeando los factores a la decena más cercana.
- Fracciona en partes iguales objetos o magnitudes representadas gráficamente y escribe la fracción que corresponde a una o más de esas partes.
- Compara números decimales con o sin apoyo de la recta numérica. Por ejemplo: compara la estatura de dos estudiantes expresada en metros.
- Efectúa cálculos mentales de productos y cocientes de números por 10, 100 y 1.000.
- Resuelve problemas que involucran multiplicación, división por un dígito o combinación de estas, realizando la operación adecuada de acuerdo al contexto. Por ejemplo: calcula el dinero reunido en una rifa realizada en un curso de 35 alumnos, si cada alumno vendió 20 números a $200 cada uno. Otro ejemplo: un padre entrega diariamente $960 para el pasaje de sus cuatro hijos. ¿Cuánto dinero gasta en pasaje cada niño durante una semana (5 días)?

4 Fracciones simples: ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{100}$).

5 Para las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{100}$.

Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

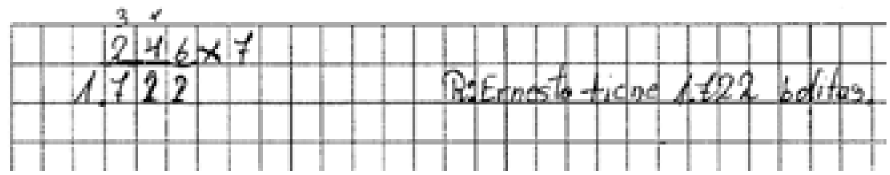
- **La tarea:**

A los alumnos y alumnas se les presentó un problema con datos explícitos e implícitos en el enunciado. En la situación planteada, los estudiantes debían determinar el número de bolitas que tendrían tres amigos.

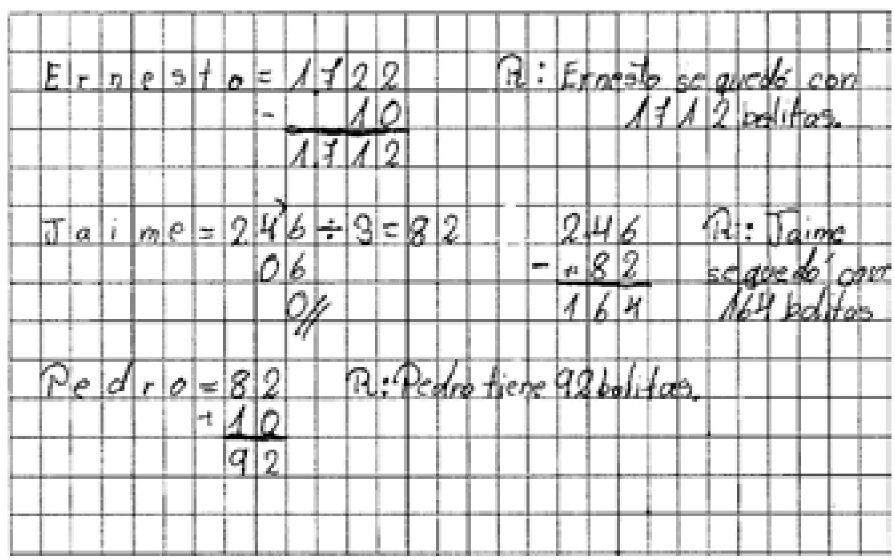
Comentario: *Para resolver la primera pregunta, identifica la operación que le permite descubrir datos no explícitos en el problema, traduciendo "7 veces" como una multiplicación por 7. Luego, en la segunda pregunta, elabora una estrategia que involucra separar el problema en partes, que le permite resolverlo paso por paso. Utiliza las operaciones adecuadas y da cuenta que comprende el significado de la división al traducir la "tercera parte" de una cantidad, como una división en tres partes iguales.*

• Ejemplo de trabajo en el nivel »

a. ¿Cuántas bolitas tiene Ernesto?



b. Ernesto y Jaime le regalan bolitas a Pedro. Ernesto le regala 10 y Jaime le regala la tercera parte de las suyas. ¿Con cuántas bolitas se quedan Jaime, Pedro y Ernesto?



Nivel 3

Reconoce que los números naturales se pueden expresar como producto de factores. Comprende el significado de potencias de base y exponente natural, y las aplica en situaciones diversas. Utiliza números decimales positivos y fracciones positivas para ordenar, comparar, estimar, medir y calcular. Comprende el significado de porcentaje y establece equivalencias entre estos y fracciones o números decimales, para calcular porcentajes. Comprende y realiza las cuatro operaciones con números positivos escritos tanto en forma decimal como fracción y en forma mental y escrita. Resuelve problemas y formula conjeturas en diversos contextos, que requieren reorganizar la información disponible. Argumenta sobre la validez de un procedimiento, estrategia o conjetura planteada.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

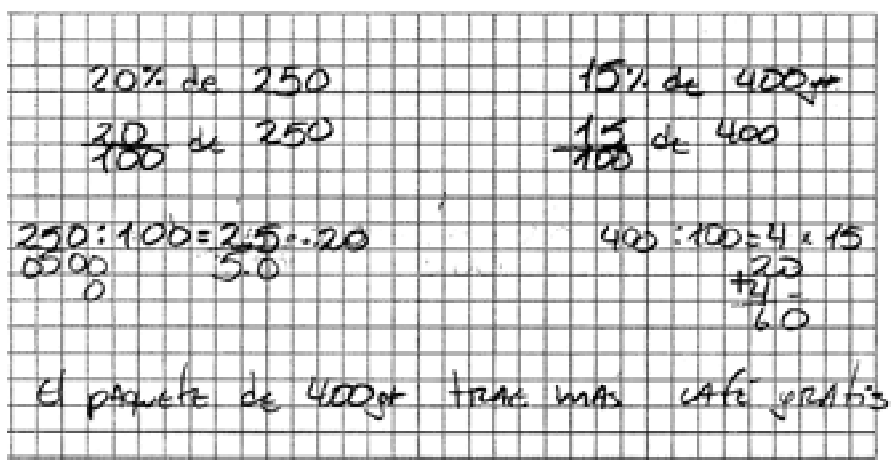
- Escribe grandes números utilizando notación de potencias. Por ejemplo: la distancia en metros entre la Tierra y el Sol.
- Resuelve problemas que involucran porcentajes, transformando el porcentaje a la fracción correspondiente. Por ejemplo: calcula el precio final de un pantalón que cuesta $4.000, si tiene un 25% de descuento.
- Realiza adiciones y sustracciones con fracciones positivas. Por ejemplo: calcula $4\frac{1}{8} - \frac{2}{4}$ (sustituyendo fracciones por otras iguales cuando sea necesario).
- Aproxima resultados de operaciones con números decimales positivos, redondeando los números involucrados.
- Encuentra fracciones iguales a una fracción dada, mediante amplificación o simplificación.
- Descompone multiplicativamente un número identificando factores. Por ejemplo: descompone el número 360 en factores primos 2 · 3 · 3 · 2 · 5 · 2, o en factores como 2 · 18 · 10; 6 · 6 · 10; 3 · 12 · 10, etc.

Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

- **La tarea:** A los estudiantes se les presentó la siguiente imagen. Se les pidió determinar cuál de los envases traía más café gratis.

- Ejemplo de trabajo en el nivel »

¿Cuál de los dos paquetes trae más café gratis? Justifica tu respuesta.



Comentarios: *Al escribir "de 250" y "de 400 gr" en su desarrollo, asocia los porcentajes con sus respectivos referentes (cantidad de café que hay en cada envase).*

Expresa el porcentaje como una fracción de denominador 100 y encuentra su valor utilizando las operaciones adecuadas.

Compara los resultados y concluye interpretando la respuesta de acuerdo al contexto.

Nivel 4

Reconoce a los números enteros como un conjunto numérico en donde se pueden resolver problemas que no admiten solución en los números naturales, reconoce sus propiedades y los utiliza para ordenar, comparar y cuantificar magnitudes. Establece proporciones y las usa para resolver diversas situaciones de variación proporcional. Comprende y realiza las cuatro operaciones con números enteros. Utiliza raíces cuadradas de números enteros positivos y potencias de base fraccionaria positiva, decimal positivo o entero y exponente natural en la solución de diversos desafíos. Resuelve problemas y formula conjeturas en diversos contextos en los que se deben establecer relaciones entre conceptos. Justifica la estrategia utilizada, las conjeturas formuladas y los resultados obtenidos, utilizando conceptos, procedimientos y relaciones matemáticas.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- Resuelve problemas que implican ordenar números enteros. Por ejemplo: ordena de menor a mayor las temperaturas mínimas registradas en una semana del mes de julio en cierta ciudad, si éstas van de – 4º C a 5º C.
- Resuelve problemas que involucran cálculo de porcentajes usando proporciones. Por ejemplo: calcula el porcentaje de mujeres de una población si se conoce el total de la población y el total de hombres.
- Usa las 4 operaciones con números enteros para realizar cálculos. Por ejemplo: “calcula - 10 – - 3”, “¿qué resultado es mayor, - 8 : - 2 ó - 20 : 4?”, etc.
- Escribe números grandes o pequeños utilizando notación científica. Por ejemplo: el tamaño de una bacteria: 0,0000002 mm como $2 \cdot 10^{-7}$ mm; la distancia del Sol a la Tierra: 150.000.000 km como $1{,}5 \cdot 10^{8}$ km.
- Resuelve problemas en que es necesario extraer raíz cuadrada de un número entero positivo.

Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

- **La tarea:** A los estudiantes se les presentó una situación con dos alternativas, en la cual debían determinar el precio más conveniente por la compra de una bicicleta, considerando descuentos y el IVA.

- Ejemplo de trabajo en el nivel »

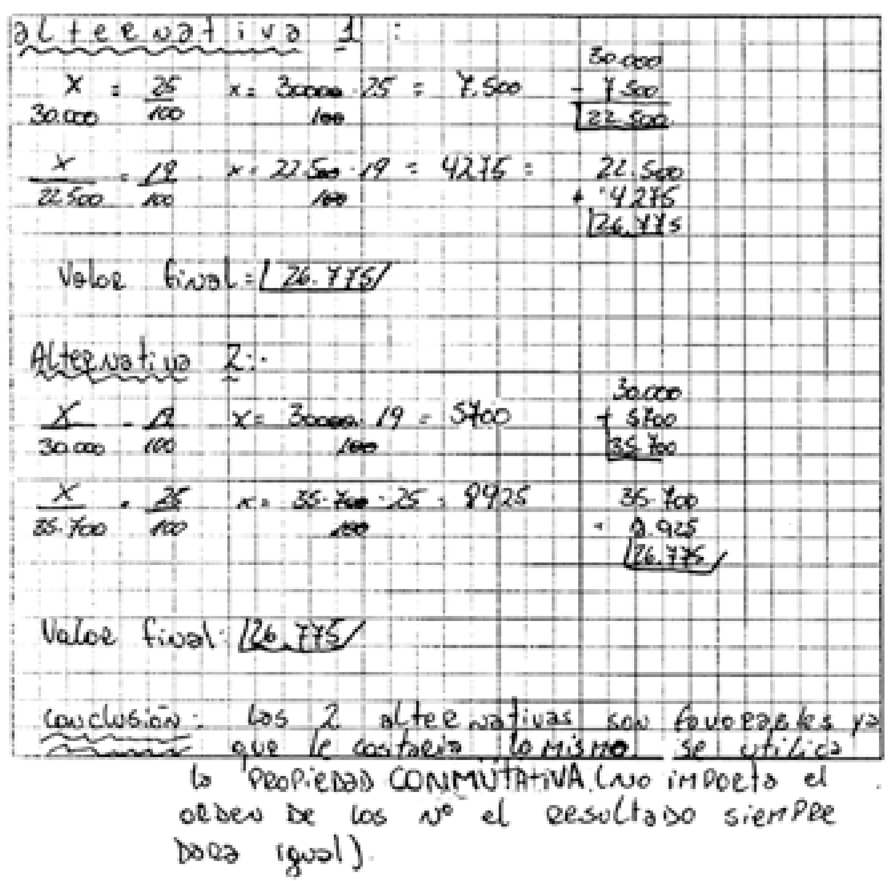
Gustavo fue a comprar una bicicleta de montaña a la tienda de su amigo Fidel. Al momento de pagar, Fidel le dijo: “Te haré un 25% de descuento, pero tengo que agregar el 19% de IVA. Te ofrezco dos alternativas:”

Alternativa 1: “Primero te hago el 25% de descuento y sobre este precio te añado el 19% de IVA”.

Alternativa 2: “Primero te añado el 19% de IVA y luego te hago el 25% de descuento”.

¿Cuál de las dos alternativas le conviene más a Gustavo? Muestra tu desarrollo.

Comentario: Para resolver el problema, utiliza un valor referencial ($30.000), no necesariamente un valor real. Calcula porcentajes utilizando las proporciones y realiza correctamente las operaciones para conocer el precio final de la bicicleta en ambos casos; concluye justificando el resultado utilizando conceptos y relaciones matemáticos.



alternativa 1:

$\frac{x}{30.000} = \frac{25}{100}$ $x = \frac{30000 \cdot 25}{100} = 7.500$ $30.000 - 7.500 = 22.500$

$\frac{x}{22.500} = \frac{19}{100}$ $x = \frac{22.500 \cdot 19}{100} = 4275$ $22.500 + 4275 = 26.775$

Valor final: 26.775

Alternativa 2:

$\frac{x}{30.000} = \frac{19}{100}$ $x = \frac{30000 \cdot 19}{100} = 5700$ $30.000 + 5700 = 35.700$

$\frac{x}{35.700} = \frac{25}{100}$ $x = \frac{35.700 \cdot 25}{100} = 8925$ $35.700 - 8.925 = 26.775$

Valor final: 26.775

Conclusión: los 2 alternativas son favorables ya que le costaría lo mismo se utiliza la propiedad conmutativa (no importa el orden de los nº el resultado siempre dara igual).

Nivel 5

Reconoce a los números racionales como un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no admiten solución en los enteros, a los irracionales como un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no admiten solución en los racionales, y a los reales como la unión entre racionales e irracionales. Interpreta potencias de base racional y exponente racional, raíces enésimas y logaritmos, establece relaciones entre ellos y los utiliza para resolver diversos problemas. Realiza operatoria con números reales, calcula potencias, raíces y logaritmos y los aplica en diversos contextos. Resuelve problemas utilizando estrategias que implican descomponer un problema o situaciones propuestas en partes o sub-problemas. Argumenta sus estrategias o procedimientos y utiliza ejemplos y contraejemplos para verificar la validez o falsedad de conjeturas.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

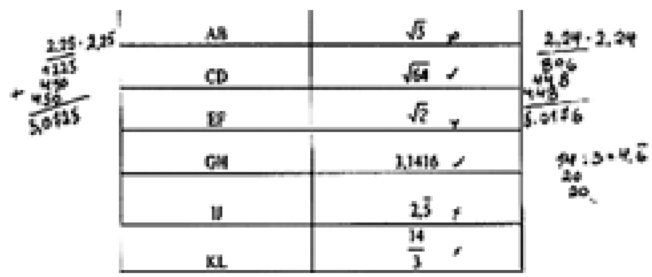
- Escribe un número racional de diversas maneras. Por ejemplo: escribe en forma de fracción el número $1{,}2\overline{5}$.
- Ubica en la recta numérica un número irracional. Por ejemplo: $\sqrt{3}$.
- Determina aproximaciones por defecto y por exceso de un número irracional con una precisión indicada. Por ejemplo: encuentra dos decimales de la $\sqrt{2}$.
- Realiza cálculos extendiendo las propiedades de las potencias a aquellas de base racional y exponente racional.
- Resuelve problemas que involucran logaritmos. Por ejemplo: calcula la energía, en ergios, (escala de Richter), liberada por un sismo de magnitud 5,5.
- Resuelve problemas cuya solución es un número irracional. Por ejemplo: “Un cuadrado tiene un área de 10 m^2. Calcula la longitud de uno de sus lados”.
- Resuelve problemas que involucran combinación de operaciones con números reales, utilizando convenciones de paréntesis, propiedades de las operaciones y prioridad de las operaciones.
- Realiza pruebas para argumentar la validez de una conjetura. Por ejemplo: “El producto de dos números irracionales distintos es siempre un número irracional”.

Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

- **La tarea:**

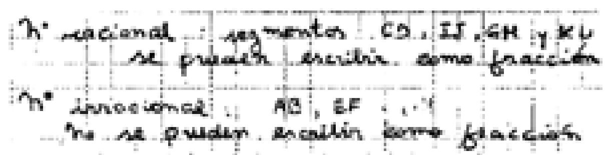
A los alumnos se les presenta la siguiente situación: "En la tabla se muestran seis segmentos y sus respectivas longitudes en centímetros. Como puedes ver, se ha utilizado intencionalmente distintas maneras para representar la longitud de cada segmento".

• Ejemplo de trabajo en el nivel »

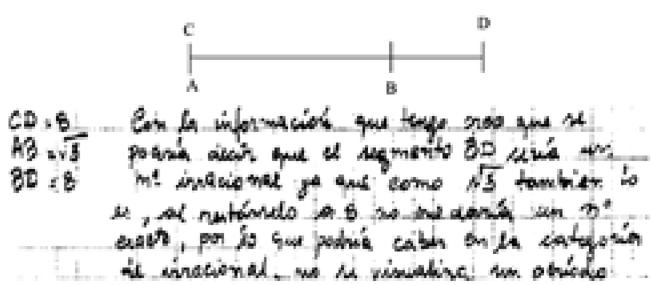


AB	$\sqrt{5}$
CD	$\sqrt{64}$
EF	$\sqrt{2}$
GH	3,1416
IJ	$2,\overline{3}$
KL	$\frac{14}{3}$

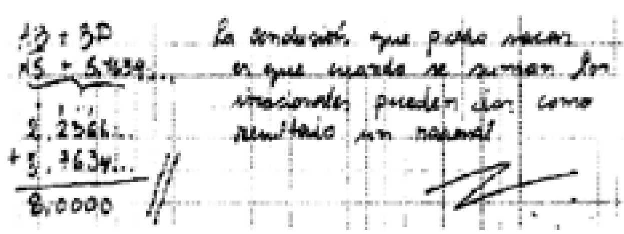
a. ¿En cuáles segmentos de la tabla su longitud corresponde a un número racional? ¿En cuáles la longitud corresponde a un número irracional? Justifica tu respuesta.



b. Si el segmento AB de longitud $\sqrt{5}$ cm es colocado encima del segmento CD de longitud $\sqrt{64}$ cm este se divide en dos trazos AB y BD como muestra la figura. Con esta información ¿la longitud del segmento resultante BD es un número racional o irracional? ¿Por qué?



c. ¿Qué conclusiones puedes sacar al sumar las longitudes de los segmentos AB y BD?



__Comentarios:__ Determina aproximaciones a un número irracional con una precisión de dos decimales.

a. *Distingue los números irracionales, de los números racionales, por la imposibilidad de escribirlos como cuociente de dos números enteros.*

b. *Resuelve problemas cuya solución es un número irracional. Infiere que al restarle un número irracional a uno racional se obtiene un número donde no es posible visualizar un período reconociéndolo como irracional.*

c. *Comprende que al sumar números irracionales, el resultado obtenido no siempre es irracional.*

Realiza conjeturas y las verifica a través de ejemplos.

Nivel 6

Reconoce a los números complejos como una extensión del campo numérico y los utiliza para resolver problemas que no admiten solución en los números reales. Usa las cuatro operaciones con números complejos. Resuelve problemas utilizando un amplio repertorio de estrategias, combinando o modificando estrategias ya utilizadas, formula conjeturas que suponen generalizaciones o predicciones y argumenta la validez de los procedimientos o conjeturas.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- Interpreta las soluciones de una ecuación cuadrática cuyo discriminante es negativo. Por ejemplo: $x^2 + 1 = 0$.
- Representa números complejos escritos en forma cartesiana sobre el plano complejo (plano de Argand).
- Escribe un número complejo de diferentes maneras. Por ejemplo: escribe el número real 5 como número complejo de la forma 5 + 0i. Otro ejemplo: Transforma el número complejo (8, -2) escrito en forma cartesiana a su forma binomial como 8 – 2i.
- Determina el producto de dos números complejos en su forma binomial. Por ejemplo: (-1 + 3i) (3 – 9i).
- Calcula la raíz cuadrada de números negativos para dar solución a un problema. Por ejemplo: “Un número elevado al cuadrado es -3, ¿cuál es el número?”.

Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

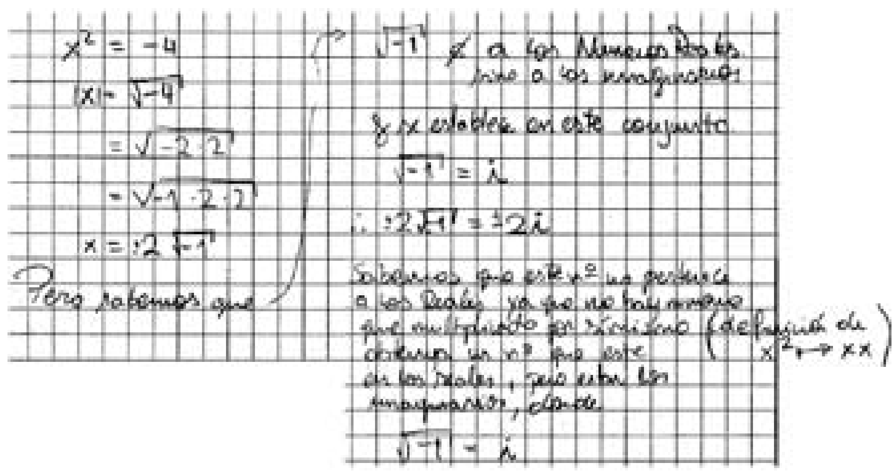
- **La tarea:**
  Ejemplo 1

A los alumnos y alumnas se les presenta una ecuación cuadrática que deben resolver y describir las soluciones obtenidas.

- Ejemplo de trabajo en el nivel »

"Sea la ecuación $x^2 + 4 = 0$".

Determina las soluciones de esta ecuación, indicando a qué conjunto numérico pertenecen. Justifica tu respuesta.


$x^2 = -4$
$|x| = \sqrt{-4}$
$= \sqrt{-2 \cdot 2}$
$= \sqrt{-1 \cdot 2 \cdot 2}$
$x = \pm 2\sqrt{-1}$
Pero sabemos que
$\sqrt{-1} \notin$ a los Números Reales sino a los imaginarios
y se establece en este conjunto
$\sqrt{-1} = i$
$\therefore \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$
Sabemos que este x^2 no pertenece a los Reales ya que no hay número que multiplicado por sí mismo (definición de $x^2 \to x \cdot x$) obtenga un nº que este en los reales, pero sí en los imaginarios, donde
$\sqrt{-1} = i$

Comentario: *Identifica el contexto numérico en el cual la ecuación cuadrática se puede resolver. Identifica y explica que $\sqrt{-1}$ no pertenece a los números reales. Encuentra las soluciones complejas de la ecuación.*

- **La tarea:**
  Ejemplo 2

A los estudiantes se les presenta una situación en la que deben trabajar con un número irracional conocido como el número áureo. Éste es presentado en su forma algebraica y una aproximación decimal. Con esto se les solicita realizar tres acciones con este número.

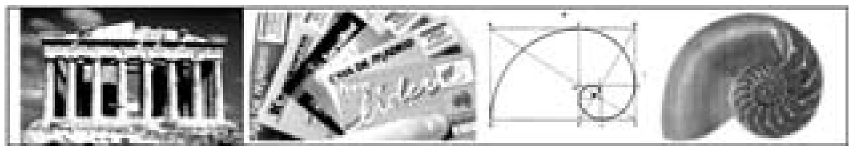
Comentarios:

a. *Resuelve la expresión reemplazando el número irracional presentado. Opera correctamente para determinar el valor resultante.*

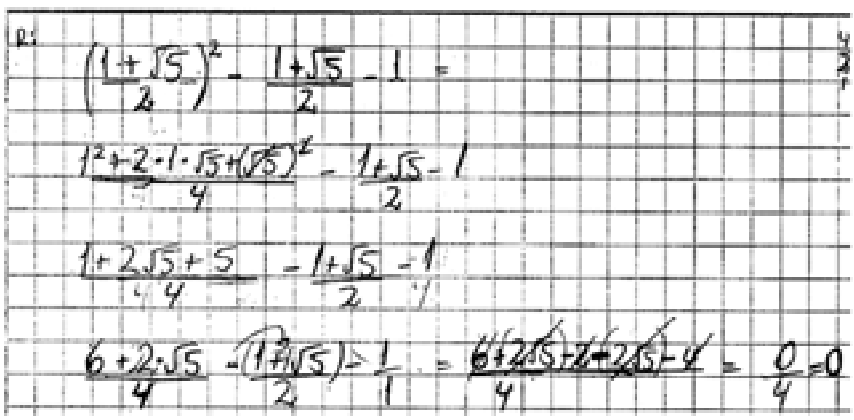
b. *Escribe las expresiones algebraicas de los números Ø y Ø $^{-1}$. Reconoce que Ø $^{-1}$ es el inverso multiplicativo de Ø. Transforma las expresiones a decimales de cinco cifras decimales, opera y con esto concluye que poseen la misma parte decimal.*

• Ejemplo de trabajo en el nivel »

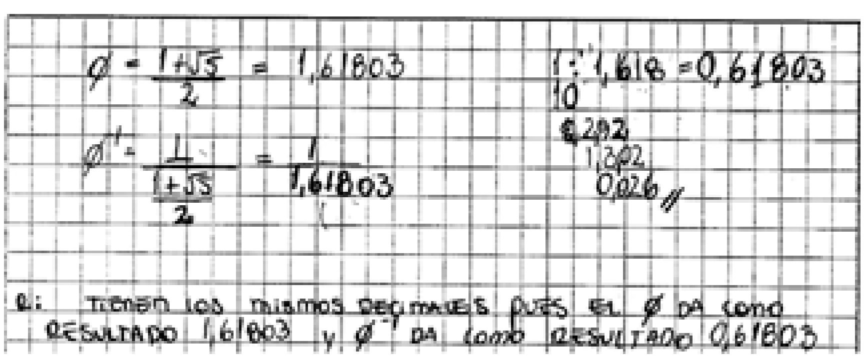
El número **áureo o dorado** se denota con la letra griega Ø (phi). Su expresión algebraica es $Ø = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que al desarrollarla se obtiene el irracional Ø = 1,61803...



a. ¿Cuál es el valor de la expresión Ø ^{2} – Ø – 1?



b. ¿Es cierto que los números Ø y Ø $^{-1}$ tienen exactamente los mismos decimales? Justifica.



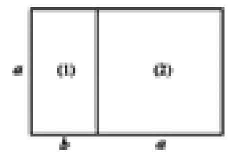
Comentarios:

c. *Utiliza los valores de las distintas expresiones para concluir que el rectángulo (1)+(2) es áureo, a través de valores numéricos.*

Utiliza distintas aproximaciones en las expresiones, por lo que concluye sin la precisión requerida para el problema.

• Ejemplo de trabajo en el nivel »

c. Sea la siguiente figura:



Justifica que si (1) es un rectángulo áureo o dorado y (2) un cuadrado, entonces el rectángulo formado por (1) + (2) es también áureo o dorado.

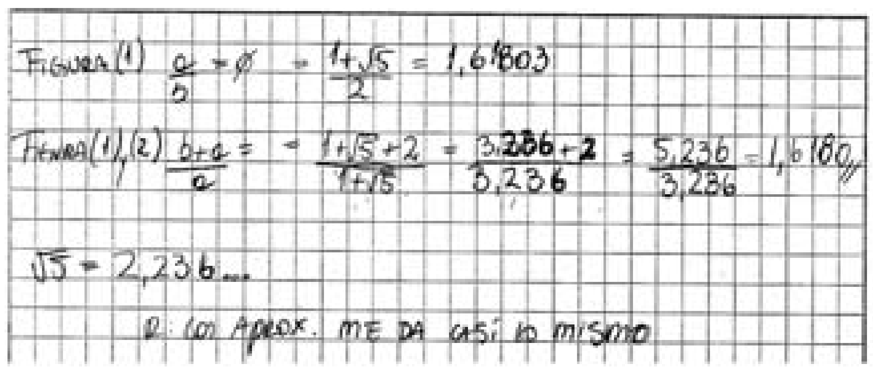


FIGURA (1) $\frac{a}{b} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803$

FIGURA (1),(2) $\frac{b+a}{a} = \frac{1+\sqrt{5}+2}{1+\sqrt{5}} = \frac{3{,}236+2}{3{,}236} = \frac{5{,}236}{3{,}236} = 1{,}6180$

$\sqrt{5} = 2{,}236\ldots$

R: con Aprox. me da casi lo mismo

Nivel 7
Sobresaliente

Comprende los diferentes conjuntos numéricos, las relaciones entre ellos y los problemas que les dieron origen[6]. Comprende que en cada conjunto numérico se puede operar sobre la base de reglas o propiedades que pueden ser usadas para justificar o demostrar relaciones. Muestra autonomía y flexibilidad para resolver un amplio repertorio de problemas, tanto rutinarios como no rutinarios, utilizando diversas estrategias y para formular conjeturas acerca de objetos matemáticos. Utiliza lenguaje matemático para presentar argumentos en la demostración de situaciones matemáticas.

¿Cómo se puede reconocer este nivel de aprendizaje? Ejemplos de desempeño

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- Explica por qué los números complejos de la forma $a + 0i$ se comportan como los números reales.
- Demuestra propiedades relativas a números. Por ejemplo: demuestra que el producto entre dos números reales negativos es un número real positivo.
- Resuelve problemas que implican la aplicación de distintos conceptos matemáticos. Por ejemplo: calcula el dinero que obtiene Juan después de 20 años si deposita en el banco \$ 500.000 al 9% de interés compuesto.

6 Los enteros motivados por la sustracción, los racionales por los cuocientes imposibles entre enteros, los irracionales como consecuencia de la raíz cuadrada y los imaginarios como consecuencia de las raíces de orden par de números negativos.

Ejemplo de trabajo de alumnos y alumnas

- **La tarea:**

A los estudiantes se les presenta una situación en la que deben trabajar con un número irracional conocido como el número áureo. Éste es presentado en su forma algebraica y una aproximación decimal. Con esto se les solicita realizar tres acciones con este número.

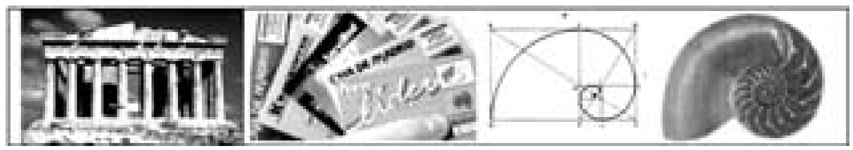
Comentarios:

a. Determina el valor de una expresión numérica, mediante operatoria con números reales. Plantea una conjetura numérica, a partir del resultado obtenido anteriormente.

b. Utiliza la conjetura anterior para demostrar la propiedad buscada.

• Ejemplo de trabajo en el nivel »

El número **áureo o dorado** se denota con la letra griega Ø (phi). Su expresión algebraica es $\text{Ø} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, que al desarrollarla se obtiene el irracional Ø = 1,61803...



a. ¿Cuál es el valor de la expresión $\text{Ø}^2 - \text{Ø} - 1$?

$\phi^2 - \phi - 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1$

$\phi^2 - \phi - 1 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{2+2\sqrt{5}}{4} - \frac{4}{4}$

$\phi^2 - \phi - 1 = \frac{1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5}-4}{4}$

$\boxed{\phi^2 - \phi - 1 = 0} \rightarrow \boxed{\phi^2 - \phi = 1}$

Se cumple que:

$\phi^0, \phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4 \ldots$

$\boxed{\phi^n - \phi^{n-1} = \phi^{n-2}}$ Donde $n \in \mathbb{N}$

b. ¿Es cierto que los números Ø y Ø^{-1} tienen exactamente los mismos decimales? Justifica.

Si $\phi = 1,61803\ldots$ y $\phi^n - \phi^{n-1} = \phi^{n-2}$ Tenemos que

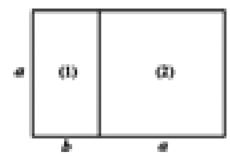
(i) $\phi - \phi^0 = \phi^{-1}$

$\boxed{\phi - 1 = \phi^{-1}}$ $1,61803\ldots - 1 = \phi^{-1}$

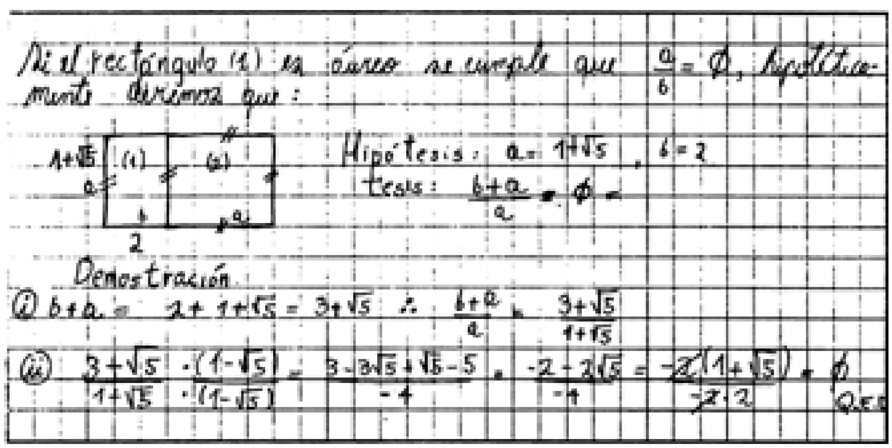
$\boxed{0,61803\ldots = \phi^{-1}}$

• Ejemplo de trabajo en el nivel »

c. Sea la siguiente figura:



Justifica que si (1) es un rectángulo áureo o dorado y (2) un cuadrado, entonces el rectángulo formado por (1) + (2) es también áureo o dorado.



Si el rectángulo (1) es áureo se cumple que $\frac{a}{b} = \phi$, hipotéticamente diremos que:

Hipótesis: $a = 1+\sqrt{5}$, $b = 2$

Tesis: $\frac{b+a}{a} = \phi$

Demostración

(i) $b+a = 2+1+\sqrt{5} = 3+\sqrt{5} \therefore \frac{b+a}{a} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$

(ii) $\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{(1-\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})} = \frac{3-3\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{-4} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{-4} = \frac{-2(1+\sqrt{5})}{-2\cdot 2} = \phi$ QED

Comentarios:

c. *Formaliza una demostración matemática planteando explícitamente hipótesis y tesis. Encadena correctamente los argumentos para demostrar la proposición matemática. Demuestra dominio en la operatoria con raíces.*

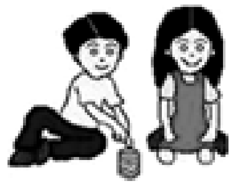
Anexos

Tareas Aplicadas por Nivel

Anexo

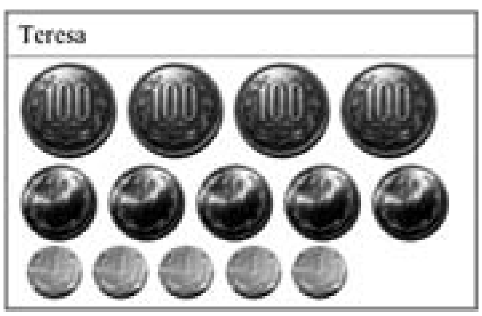
Nivel 1 / Tareas Aplicadas

Los hermanos Juan y Teresa desean comprar chocolates de $120 en el quiosco del colegio.



1. Si Juan tiene dinero para comprar dos chocolates, entonces ¿cuánto dinero tiene Juan? Muestra tu desarrollo.

Teresa muestra a su hermano Juan que tiene las siguientes monedas:



2. De los dos hermanos, ¿quién tiene más dinero? Muestra tu desarrollo

Anexo

Nivel 2 / Tareas Aplicadas

Jaime tiene una bolsa con 246 bolitas. Su amigo Ernesto dice que él tiene 7 veces lo que tiene su amigo Jaime.

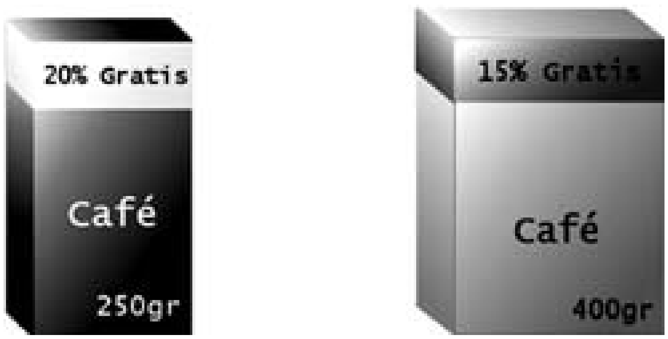
a. ¿Cuántas bolitas tiene Ernesto?

b. Ernesto y Jaime le regalan bolitas a Pedro. Ernesto le regala 10 y Jaime le regala la tercera parte de las suyas. ¿Con cuántas bolitas se quedan Jaime, Pedro y Ernesto?

Anexo

Nivel 3 / Tareas Aplicadas

Paulina va al supermercado a comprar café y se encuentra con la siguiente oferta:



¿Cuál de los dos paquetes trae más café gratis? Justifica tu respuesta.

Anexo

Nivel 4 / Tareas Aplicadas

Gustavo fue a comprar una bicicleta de montaña a la tienda de su amigo Fidel. Al momento de pagar, Fidel le dijo: “Te haré un 25 % de descuento, pero tengo que agregar el 19 % de IVA. Te ofrezco dos alternativas:”

Alternativa 1: “Primero te hago el 25% de descuento y sobre ese precio te añado el 19% de IVA”.

Alternativa 2: “Primero te añado el 19% de IVA y luego te hago el 25% de descuento”.

¿Cuál de las dos alternativas le conviene más a Gustavo? Justifica tu respuesta.

Anexo

Nivel 5 / Tareas Aplicadas

En la tabla se muestran seis segmentos y sus respectivas longitudes en centímetros. Como puedes ver, se ha utilizado intencionalmente distintas maneras para representar la longitud de cada segmento.

Segmento	Longitud (cm)
AB	$\sqrt{5}$
CD	$\sqrt{64}$
EF	$\sqrt{2}$
GH	3,1416
IJ	$2,\overline{5}$
KL	$\frac{14}{3}$

a. ¿En cuáles segmentos de la tabla su longitud corresponde a un número racional? ¿En cuáles la longitud corresponde a un número irracional? Justifica en cada caso.

Anexo

Nivel 5 / Tareas Aplicadas

b. Si el segmento AB de longitud $\sqrt{5}$ cm es colocado encima del segmento CD de longitud $\sqrt{64}$ cm este se divide en dos trazos AB y BD como muestra la figura. Con esta información ¿la longitud del segmento resultante BD es un número racional o irracional? ¿Por qué?

c. ¿Qué conclusiones puedes sacar al sumar las longitudes de los segmentos AB y BD?

Anexo

Nivel 6 / Tareas Aplicadas

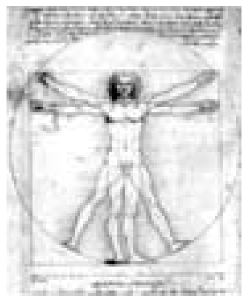
a. Sea la ecuación cuadrática $x^2 + 4 = 0$.

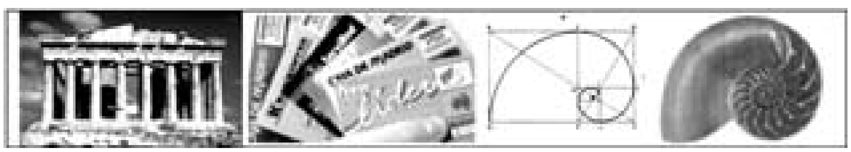
Determina las soluciones de esta ecuación, indicando a qué conjunto numérico pertenecen. Justifica tu respuesta.

Anexo

Nivel 6 y 7 / Tareas Aplicadas

El número **áureo o dorado** se denota con la letra griega Ø (phi). Un número irracional cuya expresión algebraica es Ø = $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, que al desarrollarlo se obtiene la expresión decimal Ø = 1,61803... Un número nada fácil de imaginar que convive con la humanidad, ya que aparece en la naturaleza y en las proporciones del hombre y desde la época griega hasta nuestros días en el arte y el diseño.





El número de oro y sus potencias poseen curiosas propiedades. De acuerdo a la expresión algebraica de Ø, desarrolla los siguientes puntos.

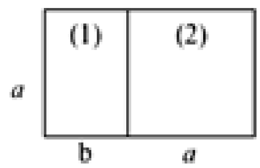
a. ¿Cuál es el valor de la expresión Ø ^{2} – Ø – 1?

Anexo

Nivel 6 y 7 / Tareas Aplicadas

b. ¿Es cierto que los números $\emptyset$ y $\emptyset^{-1}$ tienen exactamente los mismos decimales? Justifica.

c. Un rectángulo es áureo cuando la razón entre su largo (a) y su ancho (b) es el número dorado, es decir $\frac{a}{b} = \emptyset$. Sea la siguiente figura:



Justifica que si (1) es un rectángulo áureo o dorado y (2) es un cuadrado, entonces el rectángulo formado por (1) + (2) es también áureo o dorado.

Mapas de Progreso
del Aprendizaje

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN