ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE
Números Racionales

educarchile

FCH FUNDACIÓN CHILE

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

Primero Medio

Asignatura
Matemática

Materiales
- 1 copia del anexo "¿Qué números son racionales?" por cada estudiante.

Tiempo estimado
1 clase de 90 min

OBJETIVO DE APRENDIZAJE

Primero medio – OA1

Calcular operaciones con números racionales en forma simbólica.

INDICADORES AL DOCENTE

La presente actividad está pensada para ser utilizada entre la primera y segunda clase en la que se aborde el OA1, cuando los estudiantes deban aprender a clasificar números racionales y a transformar números decimales finitos, periódicos y semiperiódicos de forma simbólica.

La actividad planteada comienza como una recopilación de aspectos y operaciones de todos los conjuntos numéricos estudiados durante la enseñanza básica: naturales, enteros y racionales, caracterizando a estos últimos como el conjunto de mayor jerarquía hasta el momento y que contiene a los otros. Además, se formaliza la definición de número racional, a través de la cual se clasifican números dados. También se agrega a los números racionales, los números decimales infinitos periódicos o semiperiódicos que se ajustan a la definición de números racionales.

HABILIDADES PARA EL SIGLO XXI

- Fomentando el pensamiento crítico.
- Desarrollando la metacognición.
- Fortaleciendo actitudes.

ESTRUCTURA DE CLASES

1. INICIO

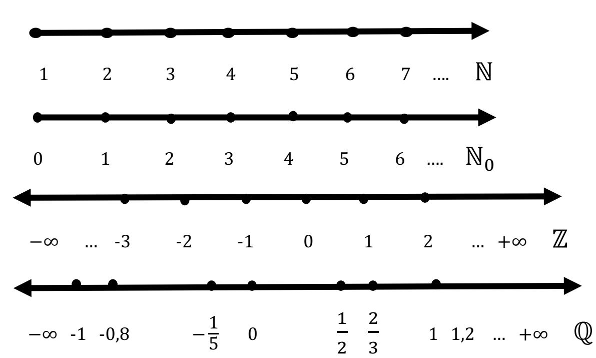
El docente saluda a las y los estudiantes, y plantea una a una a medida que obtiene respuestas de los estudiantes, las siguientes preguntas **¿Qué datos numéricos influyen en nuestra vida diaria? ¿Y en las ciencias naturales y sociales? ¿Cómo son estos números? ¿Son enteros, positivos, negativos, decimales finitos o infinitos, fraccionarios?** Se propone que el docente en un espacio en la pizarra ordenadamente anote los números que propongan los estudiantes, como por ejemplo: porcentaje de avance en un videojuego, razón de capítulos vistos de una serie en Netflix con respecto al total de episodios, la altura de una persona en metros, la cantidad de "likes" que tuvo una publicación en Instagram, temperaturas bajo 0°C, ganancia o pérdida en inversiones o cuentas bancarias, las raíces inexactas que representan medidas de segmentos en el plano, el número π (pi) que representa la razón entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia, entre otros. Si ningún estudiante propone un número irracional, se sugiere que proponga uno, para que así los estudiantes tengan un ejemplo de un número que no es racional más adelante.

Se recomienda que una vez que se haya anotado suficientes y variados tipos de datos numéricos con sus respectivas descripciones, los estudiantes, guiados por el profesor, clasifiquen los números según el conjunto numérico al que pertenecen. Una vez que han terminado de clasificar los números, se sugiere preguntar **¿qué relación hay entre los conjuntos numéricos? ¿Por qué los números enteros positivos son iguales a los naturales? ¿y las fracciones de denominador 1 son iguales a los números enteros?**

2. DESARROLLO

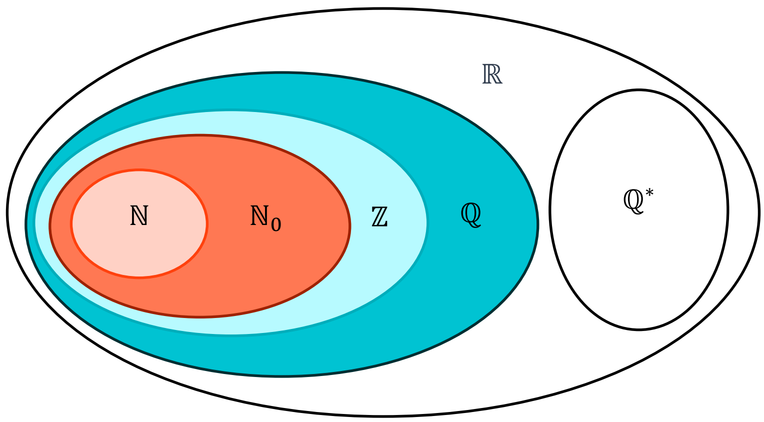
Para que los estudiantes puedan responder a las preguntas planteadas en el inicio, el profesor crea en conjunto con ellos de forma paralela, las rectas numéricas de cada uno de los conjuntos. Para que los estudiantes las comprendan y puedan establecer relación entre ellos, se sugiere seguir un diálogo socrático respecto de los conjuntos numéricos estudiados en la enseñanza básica, en orden y poniendo énfasis en los problemas que aparecían en cada nivel y que daba origen a cada conjunto numérico. Para este diálogo se proponen las siguientes preguntas:

- ¿Cómo eran los números que trabajábamos cuando íbamos en primero y segundo básico?
- ¿Qué operaciones podíamos hacer y cuáles no?
- ¿Cuál era el primer número natural?
- ¿Qué pasaba cuando intentábamos restar números iguales?
- ¿Qué pasaba cuando el sustraendo era mayor que el minuendo?
- ¿Cómo son y en que curso más o menos estudiaste los números enteros?



- ¿Qué pasa cuando al dividir un par de números, el resto es distinto de cero?
- ¿Hay partes o números que se repitan en algunas rectas numéricas? ¿Por qué pasará eso?
- ¿Los números naturales son cardinales? ¿Y los cardinales son enteros? ¿Y los números enteros son racionales?
- ¿Qué números son racionales? ¿Qué números no lo son?

Luego de haber terminado el diálogo socrático, estudiantes y docente representan las relaciones entre conjuntos numéricos a través del siguiente diagrama:



Dado que los estudiantes aún no conocen los conjuntos de números irracionales $\mathbb{Q}^*$, ni el de números reales $\mathbb{R}$, es el profesor el que debe incluirlos al diagrama, aclarando que estos conjuntos serán estudiados en segundo medio y que incluso crecerá aún más cuando estudien los números complejos en tercero medio. Se espera que a través del diagrama actual, los estudiantes lleguen a conclusiones similares a:

- Todos los números naturales son cardinales, y además son los únicos que aparecen por la necesidad de contar.
- Todos los números cardinales son enteros.
- Todos los números enteros son racionales con denominador 1.
- Los números racionales son los números decimales finitos, fracciones y porce3ntajes.

Una vez extraídas estas conclusiones, los estudiantes ubican los números que propusieron en el inicio de la clase, sobre la región correspondiente en el diagrama, así notan el tipo de número que pertenece a cada conjunto. Se espera que noten la diversidad de formas en las que pueden presentarse los números racionales, pero asimismo se pregunten **¿Existirá alguna característica común de los números racionales que permita generalizarlos y diferenciarlos de los irracionales?**

El profesor explica que los números racionales, se llaman racionales, por que todos ellos se pueden escribir como una razón o fracción de dos términos enteros. De esta forma se comprende a los números racionales a aquellos que pueden escribirse de la forma $\frac{a}{b}$. En esta parte el docente pregunta a los estudiantes: **¿Las fracciones, números decimales infinitos y porcentajes son los únicos números racionales? ¿Todos los números decimales infinitos son irracionales?**

Para lograr que las respuestas a las preguntas del final del párrafo anterior nazcan de los estudiantes, se sugiere proponerles situaciones o contextos que describan una división que de como resultado un número decimal infinito periódico o semiperiódico, como por ejemplo 10 pastelitos que se quieren repartir en partes iguales entre 3 amigos. El resultado de esta división da $3{,}33333333\ldots = 3{,}\overline{3}$. El docente explica el uso de la raya superior para marcar periodos en los números decimales, pero además pone énfasis en que este número infinito nació de una división entre dos números enteros. Por lo que se sugiere escribir en la pizarra la siguiente relación, de la cual se determina que no todos los números decimales infinitos son irracionales.

$$\frac{10}{3} = 3{,}\overline{3} = 3{,}333333333\ldots.$$

Se espera que después de analizar estar relación, los estudiantes se pregunten **¿Qué regla deben cumplir los números decimales infinitos para ser racionales?** ¿Cómo podemos transformar estos números a fracción?

Primero, los estudiantes analizan fracciones que, al efectuar la división del numerador sobre el denominador, den como resultado números decimales infinitos, Por ejemplo:

$$\frac{83}{90} = 0{,}92222\ldots = 0{,}9\overline{2}$$

$$\frac{14}{9} = 1{,}555555\ldots. = 1{,}\overline{5}$$

$$\frac{1}{7} = 0{,}1428571428571428\ldots. = 0{,}\overline{142857}$$

$$\frac{25}{6} = 4{,}16666666\ldots. = 4{,}1\overline{6}$$

Así los estudiantes notan que todos los números decimales equivalentes a las fracciones tienen un o unos números de su desarrollo decimal que se repiten formando un periodo, aunque no todos los periodos comiencen desde el primer decimal.

Aquí, es cuando el docente define los tipos de números decimales y cuales de ellos son racionales y cuales no:

Decimal finito	**Decimal infinito periódico**	**Decimal infinito semiperiódico**	**Decimal infinito no periódico**
Aquel cuyo desarrollo decimal termina.	Aquel cuyo desarrollo decimal es infinito, pero presenta una o más cifras que se repiten desde el primer decimal.	Aquel cuyo desarrollo decimal es infinito, pero algunas cifras no se repiten, mientras que en las siguientes se aprecia el periodo.	Aquel cuyo desarrollo decimal es infinito y no presenta cifras o conjuntos de cifras repetidas en su desarrollo
Por ejemplo: $1{,}417$	Por ejemplo: $1{,}444\ldots = 1{,}\overline{4}$	Por ejemplo: $1{,}41717\ldots = 1{,}4\overline{17}$	Por ejemplo: $\sqrt{2} = 1{,}41421356$
RACIONALES			**IRRACIONALES**

De esta manera, los estudiantes reconocen todos los números que se pueden transformar a fracción, y que por ende, son racionales. Así, se espera que ellos se pregunten: **¿Cómo podemos transformar los decimales infinitos periódicos y semiperiódicos a fracción?**

El profesor explica que existe un método deductivo a través del cual se puede llevar a cabo esta transformación. Para explicarlo se sugiere tomar un ejemplo de decimal infinito periódico y otro semiperiódico y así notar que el proceso es el mismo, pero que las fracciones resultantes tienen particularidades especiales para cada tipo de número decimal. Por ejemplo:

Para transformar el número $1,\overline{5}$ a fracción, se debe suponer que $a = 1,\overline{5}$ y conseguir que se eliminen los periodos. Para ello, se transforma la expresión resultante en dos números que contengan el mismo periodo y que de esta forma al restarlos, obtener un número entero (con este método se apela a restas del tipo $5{,}7777\ldots - 0{,}7777\ldots = 5$)

Se debe recordar a los estudiantes la propiedad aditiva de las ecuaciones, es decir:
Si $a = b$ y $c = d$, entonces, $a + c = b + d$

Especialmente se tiene también que:
Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a -$

$$a = 1,\overline{5} \qquad |\cdot \mathbf{10}$$

$$\Longrightarrow 10a = 10 \cdot 1,\overline{5} \Longrightarrow 10a = 15,\overline{5}$$

Así se tiene que:

$$\begin{array}{r} 10a = 15,\overline{5} \\ -\quad a = 1,\overline{5} \\ \hline 9a = 14 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} 9a = 14 \\ \boxed{a = \frac{14}{9}} \end{array}$$

Se debe reforzar la idea de que, al multiplicar números por potencias de 10, la coma decimal se corre tantas veces como el exponente de la potencia (o la cantidad de ceros que tenga el número que representa esta potencia), así, cuando multiplicamos por 10, la coma se corre una vez, por 100, 2 veces y así sucesivamente.

En el caso de los números decimales semiperiódicos como $0{,}9\overline{2}$, supondremos que $b = 0{,}9\overline{2}$ para aplicar una técnica análoga a la utilizada en el caso del número periódico:

$$b = 0{,}9\overline{2} \qquad |\cdot \mathbf{10}$$
$$\Longrightarrow 10b = 10 \cdot 0{,}9\overline{2} \Longrightarrow 10b = 9,\overline{2}$$

$$b = 0{,}9\overline{2} \qquad |\cdot \mathbf{100}$$
$$\Longrightarrow 100b = 100 \cdot 0{,}9\overline{2} \Longrightarrow 100b = 92,\overline{2}$$

Así se tiene que:

$$\begin{array}{r} 100b = 92,\overline{2} \\ -\quad 10b = 9,\overline{2} \\ \hline 90b = 83 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} 90b = 83 \\ \boxed{b = \frac{83}{90}} \end{array}$$

Una vez hecha la transformación, los estudiantes notan diferencias en el procedimiento realizado para transformar los números decimales periódicos y semiperiódicos. Se espera que noten que la fracción periódica tiene denominador 9, mientras que la fracción semiperiódica tiene denominador 90. Además, notan que es necesario hacer dos amplificaciones para poder eliminar completamente el ante periodo.

Una vez terminado este análisis metacognitivo, el profesor entrega una copia del recurso pedagógico “¿Qué números son racionales?” en el cual se presentan explicadas las fórmulas generalizadas para transformar números decimales periódicos y semiperiódicos a fracción, en el cual los estudiantes podrán aplicar estas fórmulas o realizar el proceso deductivo explicado para hacer transformaciones de números decimales a fracción.

Se sugiere explicar las fórmulas y realizar un ejercicio de cada transformación con los estudiantes, cuya solución se encuentra en la pauta del recurso pedagógico en anexos. Luego, el docente debe pasar a una labor colaborativa en la cual guíe y supervise la práctica individual de los estudiantes.

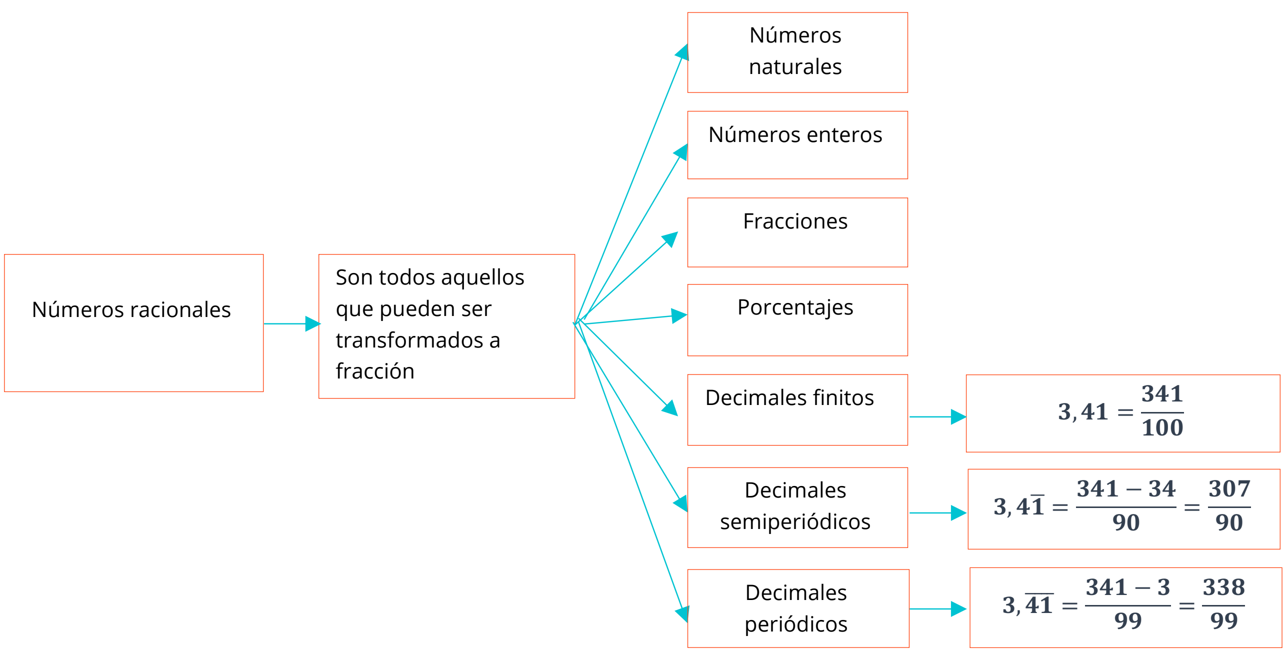
Una vez que queden 15 minutos de clase, el profesor interviene para que los estudiantes cesen el trabajo individual y retroalimenten su propio trabajo en una instancia plenaria moderada por el docente, compartiendo sus resultados y procedimientos y corrigiendo así errores que pudieron hacer aparecido. Posteriormente el profesor guía la actividad de cierre.

3. CIERRE

El profesor dispone sobre una mesa, carteles de cartulina de colores llamativos con scotch en la parte posterior y las leyendas: “Números racionales”, “Son todos aquellos que pueden ser transformados a fracción”, “Números naturales”, “Números enteros” “Fracciones”, “Porcentajes”, “Decimales finitos”, “Decimales semiperiódicos”, “Decimales periódicos”,

$$“3,\overline{41} = \frac{341-3}{99} = \frac{338}{99}”, “3{,}4\overline{1} = \frac{341-34}{90} = \frac{307}{90}”, ”3{,}41 = \frac{341}{100}”$$

Estudiantes elegidos al azar por el profesor pasan a la mesa toman un cartel y lo disponen en la pizarra uniendo con flechas dibujadas con plumón o conectores que ellos crean necesarios. Los estudiantes que sorteen las transformaciones que se muestran, deben explicarlas. El mapa conceptual esperado es similar al siguiente:



EVALUACIÓN Y SUGERENCIAS

INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

Para evaluar si los estudiantes se apropiaron de los conocimientos, habilidades y actitudes, se sugiere observar si los estudiantes llevan a cabo las siguientes acciones:

- Identifican el tipo de número, racional, entero y natural, y las operaciones involucradas.
- Definen a los números racionales como todos aquellos que pueden transformarse a fracción.
- Transforman números decimales infinitos periódicos y semiperiódicos a fracción.
- Evaluar procedimientos y comprobar resultados propios y de otros, de un problema matemático.
- Describir relaciones y situaciones matemáticas, usando lenguaje matemático, esquemas y gráficos.
- Comparten de forma desinteresada sus puntos de vista.
- Formulan preguntas o exponen hipótesis propias acerca de una situación o un problema.

SUGERENCIAS DE USO

- Se sugiere que este recurso de planificación se utilice en la Unidad de aprendizaje N°1, entre la primera y segunda clase en la que se aborde el OA1, Calcular operaciones con números racionales en forma simbólica. En este caso, la actividad colectiva es una actividad que, mediante diálogo socrático, busca que los estudiantes sinteticen lo que saben de números racionales hasta el momento y conciban a este conjunto numérico como el de mayor jerarquía hasta ahora. Además, en la actividad "¿Qué números son racionales?" se busca que los estudiantes clasifiquen números como naturales, cardinales, enteros, racionales o irracionales; y que además transforme a fracción decimales finitos, semiperiódicos y periódicos.

- Recuerde que comprender es una habilidad que requiere que el estudiante reconozca, desglose y clasifique las partes y procedimientos involucrados, construyendo el saber en base a sus propios conocimientos previos. Además, una vez que los estudiantes comprenden, están listos para aplicar procedimientos o algoritmos.

Anexos

Recurso pedagógico "¿Qué números son racionales?"

Nombre: ____

Curso: 1° Medio ____

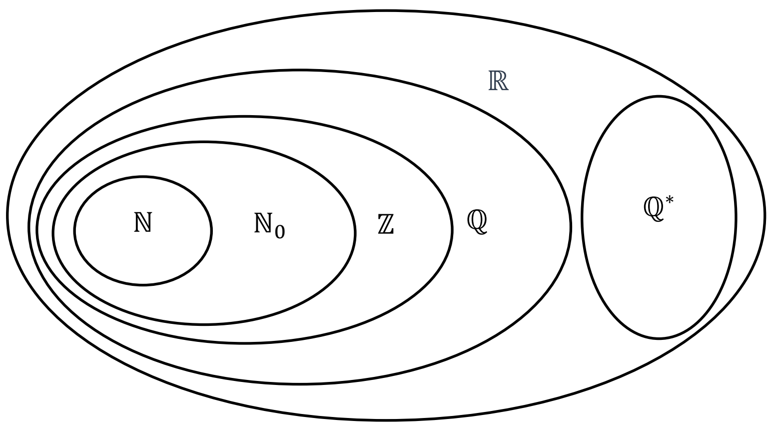
OA 1 **Calcular operaciones con números racionales en forma simbólica**.

Indicadores de evaluación:

- Identifican el tipo de número, racional, entero y natural, y las operaciones involucradas.
- Definen a los números racionales como todos aquellos que pueden transformarse a fracción.
- Transforman números decimales infinitos periódicos y semiperiódicos a fracción.

1) **Ubica los números que se encuentran en la tabla, sobre la región correspondiente respetando su clasificación como natural, cardinal, entero, racional o irracional.**

-48	$-\frac{1}{5}$	568
$0,6784$	$\sqrt{5}$	$0,67\overline{1}$
$5,\overline{8}$	35%	0



Para transformar números decimales a fracción, hay que seguir los procedimientos que se indican en la tabla, dependiendo del tipo de número decimal que sea. Si el decimal es infinito no periódico, no puede ser transformado en una fracción porque no es racional.

Decimal finito	Decimal infinito periódico	Decimal infinito semiperiódico
Se escribe en el numerador todos los dígitos que forman el número decimal y en el denominador una potencia de 10 con tantos ceros como cifras decimales tenga dicho número. **Por ejemplo:**	Se escribe en el numerador la diferencia entre número decimal completo (sin considerar la coma) y el número formado por todas las cifras que anteceden al período y en el denominador tantos nueve como cifras tenga el período. **Por ejemplo:**	Se escribe en el numerador la diferencia entre el número completo (sin considerar la coma) y el número formado por todas las cifras que anteceden al período y en el denominador se escriben tantos nueve como cifras tenga el período, seguido de tantos ceros como cifras tenga el ante período. **Por ejemplo:**
$a,bcd = \frac{abcd}{1000}$	$a,\overline{bcd} = \frac{abcd - a}{999}$	$a,b\overline{cd} = \frac{abcd - ab}{990}$

2) Transforme los siguientes números decimales infinitos a fracción utilizando el método estudiado en clases.

a. $4,\overline{7}$	**b.** $1,32\overline{5}$

3) Transforme los siguientes números decimales a fracción utilizando los procedimientos que se explican en la tabla.

a. $5,2\overline{1}$	**b.** $-8,\overline{91}$
c. $3,34$	**d.** $0,1\overline{32}$

Recurso pedagógico “¿Qué números son racionales? (PAUTA)

Nombre: ____

Curso: 1° Medio ____

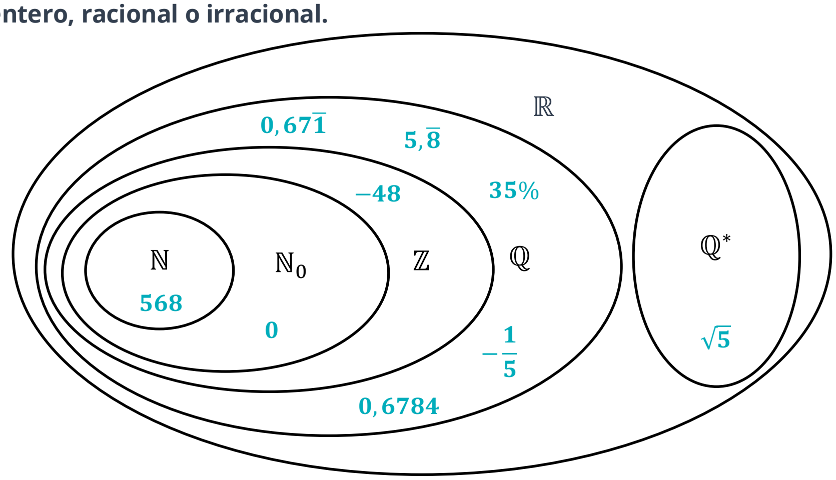
OA 1 Calcular operaciones con números racionales en forma simbólica.

Indicadores de evaluación:

- Identifican el tipo de número, racional, entero y natural, y las operaciones involucradas.
- Definen a los números racionales como todos aquellos que pueden transformarse a fracción.
- Transforman números decimales infinitos periódicos y semiperiódicos a fracción.

1) Ubica los números que se encuentran en la tabla, sobre la región correspondiente respetando su clasificación como natural, cardinal, entero, racional o irracional.

-48	$-\frac{1}{5}$	568
$0,6784$	$\sqrt{5}$	$0,67\overline{1}$
$5,\overline{8}$	35%	0



Para transformar números decimales a fracción, hay que seguir los procedimientos que se indican en la tabla, dependiendo del tipo de número decimal que sea. Si el decimal es infinito no periódico, no puede ser transformado en una fracción porque no es racional.

Decimal finito	Decimal infinito periódico	Decimal infinito semiperiódico
Se escribe en el numerador todos los dígitos que forman el número decimal y en el denominador una potencia de 10 con tantos ceros como cifras decimales tenga dicho número. **Por ejemplo:**	Se escribe en el numerador la diferencia entre número decimal completo (sin considerar la coma) y el número formado por todas las cifras que anteceden al período y en el denominador tantos nueve como cifras tenga el período. **Por ejemplo:**	Se escribe en el numerador la diferencia entre el número completo (sin considerar la coma) y el número formado por todas las cifras que anteceden al período y en el denominador se escriben tantos nueve como cifras tenga el período, seguido de tantos ceros como cifras tenga el ante período. **Por ejemplo:**
$a,bcd = \frac{abcd}{1000}$	$a,\overline{bcd} = \frac{abcd - a}{999}$	$a,b\overline{cd} = \frac{abcd - ab}{990}$

2) **Transforme los siguientes números decimales infinitos a fracción utilizando el método estudiado en clases.**

a. $4,\overline{7}$	**b.** $1,32\overline{5}$
$x = 4,\overline{7} \quad \vert \cdot 10$ $\Longrightarrow 10x = 10 \cdot 4,\overline{7} \Longrightarrow 10x = 47,\overline{7}$ Así se tiene que: $\begin{array}{r} 10x = 47,\overline{7} \\ - \quad x = 4,\overline{7} \\ \hline 9x = 43 \end{array}$ $\Longrightarrow 9x = 43$ $\Longrightarrow \boxed{x = \frac{43}{9}}$	$y = 1,32\overline{5} \quad \vert \cdot 100$ $\Longrightarrow 100y = 100 \cdot 1,32\overline{5} \Longrightarrow 100y = 132,\overline{5}$ $y = 1,32\overline{5} \quad \vert \cdot 1000$ $\Longrightarrow 1000y = 1000 \cdot 1,32\overline{5} \Longrightarrow 1000y = 1325,\overline{5}$ Así se tiene que: $\begin{array}{r} 1000y = 1325,\overline{5} \\ - \quad 100y = 132,\overline{5} \\ \hline 900y = 1193 \end{array}$ $\Longrightarrow 900y = 1193$ $\Longrightarrow \boxed{y = \frac{1193}{900}}$

3) **Transforme los siguientes números decimales a fracción utilizando los procedimientos que se explican en la tabla.**

a. $5,2\overline{1}$	**b.** $-8,\overline{91}$
$5,2\overline{1} = \frac{521-52}{90} = \frac{469}{90}$	$-8,\overline{91} = -\frac{891-8}{99} = \frac{883}{99}$
c. $3,34$	**d.** $0,1\overline{32}$
$3,34 = \frac{334}{100} = \frac{167}{50}$	$0,1\overline{32} = \frac{132-1}{990} = \frac{131}{990}$